

ANÁLISIS DE ERRORES EN LA TEORÍA DE TRANSICIONES EN LÍNEAS DE TRANSMISIÓN

JAVIER BARA TENES

Cátedra de Microondas, Esc. Tec. Sup. Ing. de Telecomunicación, Barcelona.

ABSTRACT

The analysis of transmission line tapers is approached through an integral equation formulation (equivalent to a series solution for propagation through an inhomogeneous medium given by Bremmer) which can be used to iteratively obtain approximations, the first of which is the formula ordinarily used in the analysis and synthesis problems. From the second, an estimation of the error involved in the computation of the reflection is obtained and studied in detail for the exponential and the Chebyshev tapers. This latter is found to be very sensitive to the approximations involved for large mismatches and/or low residual reflections. Formulas and graphs are given that allow one to assess the accuracy and to improve the design.

INTRODUCCION

Nos referiremos a la situación de la fig. 1: Una línea de transmisión ideal de impedancia característica $Z_0=1$ conectada mediante una transición de longitud L a una sección adaptada de $Z_0=Z_L$. Estamos interesados en el coeficiente de reflexión $\rho(0)$ a la entrada de la línea en régimen senoidal permanente.

Si se supone la velocidad de fase constante en el sistema, $\rho(x)$ obedece la ecuación /1/, /2/:

$$\frac{d\rho}{dx} = 2\gamma\rho - (1-\rho^2)f(x) \quad (1)$$

con $f(x) = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \ln Z_0(x)$

y γ la constante de propagación. Esta ecuación solo puede integrarse en ciertos casos; pero si se supone $\rho(x) \ll 1$ en la transición, de forma que pueda desprejiciarse, se integra rápidamente, proporcionando:

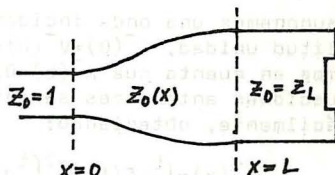


Fig. 1.- Situación bajo estudio.

$$\rho(x) = e^{2\gamma x} \int_x^L f(y) e^{-2\gamma y} dy \approx R(x) \quad (2)$$

Esta expresión es útil tanto en análisis como en síntesis, pero por su carácter aproximado se considera precisa solamente para desadaptaciones pequeñas.

En este trabajo se investiga el margen de validez de (2) y se establecen cotas para los errores involucrados sin recurrir a la integración numérica de (1).

ANÁLISIS PRELIMINAR

En la transición, la tensión y la corriente están relacionados mediante:

$$\frac{d}{dx} v(x) = -\gamma Z_0(x) I(x) \quad (3a)$$

$$\frac{d}{dx} I(x) = -\frac{\gamma}{Z_0(x)} v(x) \quad (3b)$$

con γ la constante de propagación, supuesta independiente de la posición (en caso contrario, las ecuaciones siempre pueden reducirse a las (3) mediante un cambio de variable $/2/, /3/$) y $Z_0(x)$ la impedancia característica local de la transición.

Si las soluciones las expresamos en la forma (método WKB, $/4/$, $/5/$):

$$v(x) = (Z_0(x))^{1/2} (A^+(x)e^{-\phi(x)} + A^-(x)e^{\phi(x)}) \quad (4a)$$

$$I(x) = (Z_0(x))^{-1/2} (A^+(x)e^{-\phi(x)} - A^-(x)e^{\phi(x)}) \quad (4b)$$

resulta $\phi(x) = \gamma x$, y, con $f(x)$ como en (1):

$$\frac{d}{dx} A^+ = -f(x)e^{2\gamma x} A^- \quad (5a)$$

$$\frac{d}{dx} A^- = -f(x)e^{-2\gamma x} A^+ \quad (5b)$$

Si suponemos una onda incidente de amplitud unidad, $A^-(0) = v^-(0) = 1$, y tenemos en cuenta que $A^-(L) = 0$, las ecuaciones anteriores se integran fácilmente, obteniendo:

$$A^-(x) = \int_x^L f(t)e^{-2\gamma t} dt + \int_0^L K_0(x, t) A^-(t) dt \quad (6)$$

con el núcleo dado por

$$K_0(x, t) = -f(t)e^{2\gamma t} \int_{\max(x, t)}^L f(t')e^{-2\gamma t'} dt' \quad (7)$$

La ec. (6) puede utilizarse para calcular $\rho(0) = A^-(0)$ por iteración. Comenzando por la aproximación inicial $A^-(0) = 0$, se obtiene la aproximación clásica (1), y procediendo de esta manera obtendríamos una solución en serie de Neumann para la ecuación integral (6), aunque su complejidad analítica la hace impráctica para cálculos. Una ecuación análoga fué obtenida por primera vez por Bremmer en relación con un problema de propagación en un medio inhomogéneo por sustitución del medio por un conjunto de capas y consideración de las reflexiones múltiples entre ellas $/4/$.

REFLEXIONES MÚLTIPLES

La interpretación del final del párrafo anterior se puede poner de manifiesto si en (5) sustituimos $f(x)$ por $sf(x)$ y ponemos:

$$A^\pm = \sum_n s^n A_n^\pm \quad (7)$$

con s una cantidad que se introduce por conveniencia y que posteriormente reducimos a la unidad. Se obtiene:

$$\frac{d}{dx} A_{n+1}^+ = -f(x)e^{-2\gamma x} A_n^- \quad (n \neq 0) \quad (8a)$$

$$\frac{d}{dx} A_{m+1}^- = -f(x)e^{-2\gamma x} A_m^+ \quad (m \neq 0) \quad (8b)$$

y las derivadas de A_0^- y A_0^+ nulas.

Es evidente de estas expresiones que el término A_{m+1}^- representa la onda generada por reflexión continúa de la A_m^+ y análogamente para A_{n+1}^+ y A_n^- (Fig. 2).

Con las mismas condiciones que para obtener (6) se obtiene ahora:

$$A_{2n+2}^-(x) = \int_0^L K_0(x, t) A_{2n}^-(t) dt \quad (9)$$

$$(2n+2 \neq 1), A_1^-(x) = \int_x^L f(t)e^{-2\gamma t} dt$$

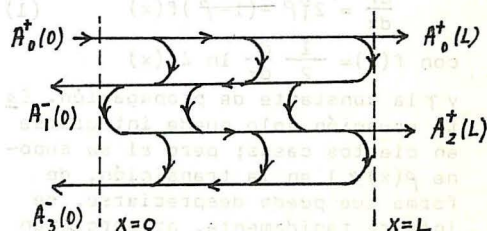


Fig. 2.- Esquema de generación de reflexiones múltiples.

Es decir, se obtienen las mismas expresiones de las aproximaciones sucesivas de la ecuación integral (6), como adelantamos en el párrafo anterior.

ESTIMACION DEL ERROR

Podemos utilizar $A_3^-(0)$ como estimación del error cometido al utilizar (2), $\varepsilon = ||P(0)| - |R(0)||$:

$$\varepsilon \approx |A_3^-(0)| = \left| \int_0^L (A_1^-(t))^2 f(t) e^{2\gamma t} dt \right|$$

$$\leq |A_1^-|_{\text{med}}^2 \left| \int_0^L f(t) dt \right| = M \quad (10)$$

(Nótese que si se supone $Z_0(x)$ monótona en la transición, el signo de $f(x)$ es constante).

Se puede comprobar, dado el carácter oscilatorio de A_1^- y el comportamiento de $f(x)$ en las transiciones utilizadas normalmente, que

$$|A_1^-|_{\text{med}}^2 = \frac{r}{\beta} |f(x)|_{\text{max}}, \quad (11)$$

con $0,5 \leq r \leq 0,7$. Si además la transición es simétrica, es decir, si $f(x) = f(x-L)$, es

$$|f(x)|_{\text{max}} = |f(L/2)|$$

$$\varepsilon \approx |A_3^-(0)| \leq \frac{r}{2\beta} |f(L/2)|^2 \ln Z_L = M \quad (12)$$

$$0,5 \leq r \leq 0,7$$

TRANSICION EXPONENCIAL

Es útil para verificar las conclusiones anteriores ya que se dispone de su solución exacta [2]. Los resultados se recogen en la tabla 1 y en la fig. 3.

En la tabla 1 puede observarse como, para $L \gg \lambda$, A_3^- supone una excelente corrección al valor aproximado R utilizado convencionalmente.

TRANSICION DE CHEBICHEV

Se sabe que es óptima en el sentido de que para Z_L y reflexión residual $|R|$ dados en la banda de paso, la longitud requerida es mínima [6]. La fig. 4 representa esta longitud en función de Z_L con $|R|_m$ como parámetro.

En el análisis que sigue haremos las siguientes hipótesis: 1) Ya que el error de R es significativo para Z_L grande y $|R|_m$ pequeño, supondremos que la longitud de la transición es por lo menos $0,5\lambda$. 2) Las discontinuidades de $Z(x)$ en los extremos de la transición se desprecian en la estimación de los errores (se comprueba que estas discontinuidades representan menos del 5% de la desadaptación logarítmica $0,5 \ln Z_L$).

Se puede demostrar también que las condiciones que permiten escribir (11) se satisfacen también en este caso. En particular, que:

$$\left| \frac{1}{2\beta} \frac{f'(x)}{f(x)} \right| \leq 0,08 \quad (13)$$

Se obtiene entonces:

$$M \approx \left(\frac{\lambda}{L} \right)^2 M_0 \quad \text{con} \quad M_0 = \frac{r}{\pi Z} \left(\frac{\lambda}{L} \right) (0,5 \ln Z_L)^3 \quad (14)$$

$$0,5 \leq r \leq 0,7$$

TABLA 1.- Comparación del valor exacto de $|P|$ con $|A_3^-(0)|$ y su cota M para una transición exponencial de longitud tal que $R=0$.

βL	$ P $	$ A_3^-(0) $	$M(r=0,6)$	
n	0,0020	0,0022	0,0025	$Z_L = 2$
$2n$	0,0005	0,0005	0,0006	
$3n$	0,0002	0,0002	0,0003	
n	0,0846	0,0776	0,0928	$Z_L = 10$
$2n$	0,0196	0,0191	0,0232	
$3n$	0,0085	0,0086	0,0103	
n	0,1966	0,1705	0,2043	$Z_L = 20$
$2n$	0,0439	0,0423	0,0511	
$3n$	0,0191	0,0190	0,0227	

con λ_0 y M los valores de λ y M en el extremo inferior de la banda de paso de la transición.

En la fig. 4, donde se representan líneas de M constante, se observa su rápido crecimiento con la carga Z_L ; la transición de Chebichev es muy sensible a las aproximaciones implícitas en la fórmula (2). En la misma figura se dibuja la línea donde la cota del error estimado, M_0 , iguala el coeficiente de reflexión residual en la banda de paso: Esto da una idea de los márgenes de Z_L y $|R|_m$ para los que los diseños basados en la fórmula (2) pueden utilizarse correctamente.

REFERENCIAS

- /1/ L.R. Walker y N. Wax, Jour. Appl. Phys., Vol. 17, pp. 1043-1045, Dec. 1946.
- /2/ R.E. Collin, "Found. Mw. Eng." McGraw-Hill, 1960
- /3/ D.C. Youla, IEEE Trans. Circ. Theory, vol. CI-11, pp. 363-372, Sept. 1964
- /4/ H. Bremmer, Comm. Pure Appl. Math. 4, pp. 105-115.
- /5/ G. Tyras, "Rad. and Prop. of EM Waves", Academic Press, 1969, pp. 82-85.
- /6/ R.W. Klopfenstein, Proc. IRE Jan. 1956, pp. 31-35.

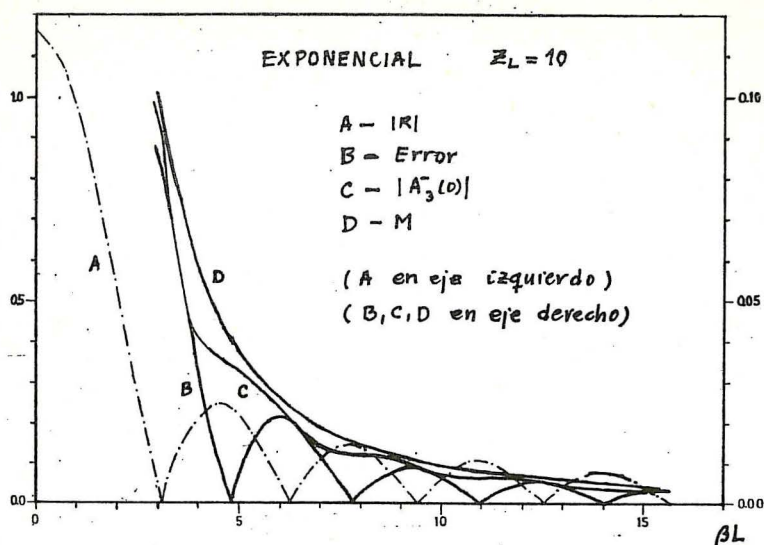


Fig. 3. Coeficiente de reflexión aproximado R (A), primera corección (C), cota calculada del valor anterior (D) y error verdadero (B) en función de la longitud normalizada de la línea para una transición exponencial. Carga normalizada $Z_L = 10$.

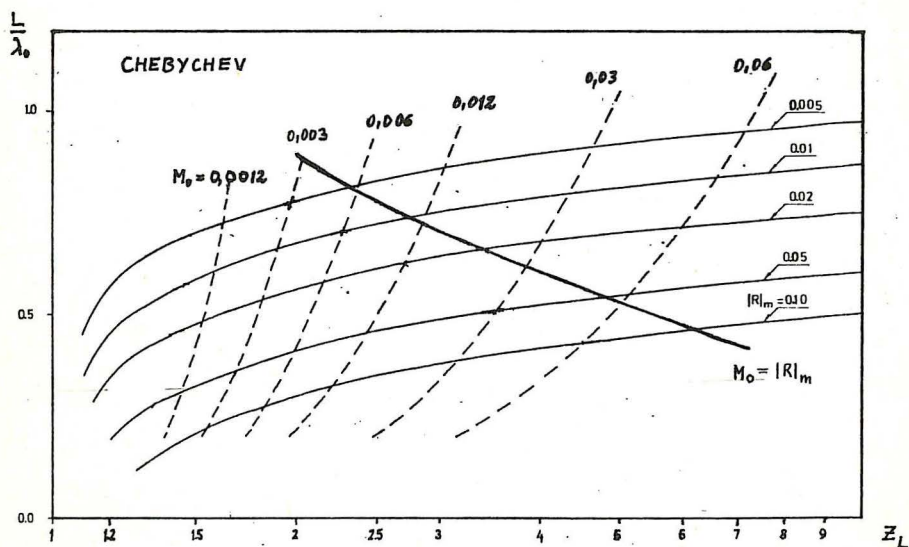


Fig. 4. Líneas de coeficiente de reflexión aproximado constante R_m (trazo sólido) y cota estimada del error M_0 (trazo discontinuo) para una transición de Chebychev en función de la impedancia (normalizada) de car a Z_L .